Chapitre 12. Suites réelles et complexes

1 Convergence

1.1 Définition

Définition 1.1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $*$ Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que u converge (ou tend) vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$
  Dans ce cas, on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ ou $u \to l$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
- $*$ On dit que u diverge si elle ne converge vers aucun $l \in \mathbb{R}$

1.2 Premières propriétés

Proposition 1.2 (Unicité de la limite). Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \\ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l' \end{cases}$

Alors $l = l'$

Proposition 1.3. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$
On a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Proposition 1.4. Toute suite convergente est bornée.

Lemme 1.5. Toute suite bornée à partir d'un certain rang (àpcr) est bornée.

Proposition 1.6 (Caractère asymptotique de la limite).
La convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes.
Plus précisément, soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ égales àpcr.
Alors u converge si et seulement si v converge. Si c'est le cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

1.3 Limites et inégalités

Théorème 1.7 (Passage à la limite dans les inégalités larges).
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
Alors $l \leq l'$

Théorème 1.8 ($\mathbb{R}_+^*$ est ouvert). Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l > 0$
Alors u est strictement positive àpcr, càd $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n > 0$

1.4 Limite infinie

Définition 1.9. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- $*$ On dit que u tend (ou diverge) vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \geq A$
  Dans ce cas, on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ ou $u \to +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- $*$ On dit que u tend (ou diverge) vers $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n \leq A$

Définition 1.10. La droite numérique achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Proposition 1.11 (Unicité de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$). Soit $n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$
Alors $l = l'$

2 Théorèmes de convergence

2.1 Opérations

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une addition et d'une multiplication "partielles", càd qu'elles ne sont pas définies pour tous les couples d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

$+$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	X
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	X	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}_-^*$	0	$b \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	X	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
0	X	0	0	0	X
$a \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	X	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 2.1. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ v_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

* On a $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l_1|$
* Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l_1$
* Si $l_1 + l_2$ est bien définie, $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2$
* Si $l_1 l_2$ est bien définie, $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$

Lemme 2.2. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u \text{ bornée} \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Lemme 2.3. Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} u \text{ bornée} \\ v_n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

Alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème 2.4. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne s'annule pas.

* Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}$
* Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
* Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante.

* Si u est majorée, elle converge : on peut trouver $l \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \end{cases}$
* Si u n'est pas majorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante.

* Si u est minorée, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq l \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \end{cases}$
* Si u n'est pas minorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Définition 2.6 (Suites adjacentes)**.** Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u et v sont adjacents si :

* u croît et v décroît.
* $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème 2.7 (des suites adjacentes)**.** Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.
Alors u et v convergent (et leurs limites sont égales).

Corollaire 2.8 (Théorème des segments emboîtés)**.** Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments (non vides) emboîtés, càd telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. On suppose en outre $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

2.3 Théorèmes de minoration, de majoration, d'encadrement

Théorème 2.9 (d'encadrement / des gendarmes)**.** Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l,\ w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \end{cases}$$

Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Corollaire 2.10. Soit $u, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq h_n \\ h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Théorème 2.11 (de minoration)**.** Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Théorème 2.12 (de majoration)**.** Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$
Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

2.4 Théorème de Cesàro

Théorème 2.13. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Corollaire 2.14 (Lemme de l'escalier)**.** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$
Alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

3 Suites extraites

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3.1.

* Une extractrice est une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite extrictrice (ou une sous-suite) de u est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

Proposition 3.2. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Soit φ une extractrice.
Alors $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$

Lemme 3.3. $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(k) \geq k$

Proposition 3.4. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ et $u_{2k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$
Alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

3.2 Construction de sous-suites particulières

Proposition 3.5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite non majorée.
Alors il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

Proposition 3.6. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$
Alors il existe une extractrice φ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \left| u_{\varphi(k)} - l \right| \leq \varepsilon_k$

3.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

3.4 Valeurs d'adhérence

Définition 3.8. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Un réel $l \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$

Proposition 3.9. Une suite bornée possédant une unique valeur d'adhérence converge.

Définition 3.10. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. On définit :

* La limite supérieure de u, notée $\limsup(u)$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup u_n$ ou $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} u_n$)

$$\limsup(u) = \lim_{n \to +\infty} \sup_{p \geq n} u_p = \sup\{u_p \mid p \geq n\} \quad (= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} u_n)$$

* La limite inférieure de u, notée $\liminf(u)$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \inf u_n$ ou $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} u_n$)

$$\liminf(u) = \lim_{n \to +\infty} \inf_{p \geq n} u_p = \inf\{u_p \mid p \geq n\} \quad (= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{p \geq n} u_p)$$

Proposition 3.11. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée.

* $\limsup(u)$ est la plus grande valeur d'adhérence de u
* $\liminf(u)$ est la plus petite valeur d'adhérence de u
* La suite u converge si et seulement si $\limsup(u) = \liminf(u)$

4 Caractérisation séquentielle

4.1 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Proposition 4.1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Corollaire 4.2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et majorée et $S \in \mathbb{R}$
Alors $S = \sup(A)$ ssi S majore A et il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} S$

4.2 Caractérisation séquentielle de la densité

On sait déjà qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est dense ssi $\overline{A} = \mathbb{R}$. On obtient la caractérisation suivante :

Proposition 4.3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.
A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

5 Extension aux suites complexes

5.1 Généralités

Définition 5.1. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$
On dit que u converge vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$

Proposition 5.2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$
On a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff |u_n - l| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Définition 5.3. Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée si $\forall C \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C$

Proposition 5.4. Toute suite complexe convergente est bornée.

Définition 5.5. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
On dit que u tend vers l'infini si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

5.2 Lien avec le cas réel

Théorème 5.6. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$
Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff \begin{cases} \operatorname{Re} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re} l \\ \operatorname{Im} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im} l \end{cases}$$

Théorème 5.7 (Bolzano-Weierstrass, cas complexe)**.**
Toute suite complexe bornée possède une sous-suite convergente.

5.3 Suite géométrique

Théorème 5.8. Soit $a \in \mathbb{C}$
Alors $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $|a| < 1$ (auquel cas $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) ou $a = 1$ (auquel cas $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$)
et $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini ssi $|a| > 1$

6 Suites récurrentes

On étudie des suites récurrentes (d'ordre 1), càd des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une certaine fonction, que l'on appelle itératrice

6.1 Itératrice croissante : un exemple

Étudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_n = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$
On observe que $[-2, +\infty]$ est un intervalle stable donc la suite est bien définie.

1) La suite décroit.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $P(n)$: $''n_{n+1} \leq u_n''$
Initialisation : On a $u_1 = f(3) \leq 3 = u_0$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$
On a donc $u_{n+1} \leq u_n$
Par croissance de f, $f(u_{n+1} \leq f(u_n)$, càd $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, d'où $P(n+1)$, ce qui clôt la récurrence. $\square$

2) u est minorée.
En effet, $[-2, +\infty[$ est stable donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2, +\infty[$ (récurrence immédiate)
D'après le théorème de la limite monotone, on peut don trouver $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$
Par passage à la limite dans les inégalités larges, $l \geq 2$ (càd $l \in [-2, +\infty[$)

3) Montrons que l est nécessairement un point fixe de f, càd $f(l) = l$.
On a $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$
Par extraction, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$
Par continuité de f, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(l)$
Par unicité de la limite, $f(l) = l$
Puisque 2 est le seul point fixe de f, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

Variante : Cas de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$
Comme dans (1) :

1)' La suite v est monotone car f est croissante.
Comme $v_1 \geq v_0$, cette fois v croît.

2)' On doit trouver un intervalle stable plus petit.
Ici, $[-2, 2]$ est stable et contient v_0 donc v est à valeurs dans $[-2, 2]$, donc majorée.

3)' La suite converge nécessairement vers un point fixe.
$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

6.2 Itératrice décroissante : un exemple

Étudions la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2+x} \end{cases}$

Le segment $[0,1]$ est stable et inclus dans le domaine de f. On en déduit que la suite u est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$

1) Les sous-suites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées.

En effet, $\forall k \in \mathbb{N};$ $\begin{cases} u_{2(k+1)} = (f\circ f)(u_{2k}) \\ u_{2(k+1)+1} = (f\circ f)(u_{2k+1}) \end{cases}$

Comme $f \circ f$ croît (par opération), les sous-suites sont monotones.

Comme $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = \frac{3}{7}$, on a $u_2 \leq u_0$, donc $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ décroît d'où $u_3 \geq u_1$ (en appliquant f), ce que donne $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ croît.

2)Les deux sous-suites sont à valeurs dans $[0,1]$ donc bornées.

D'après le théorème de la limite monotone

$u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l_0 \in [0,1]$

$u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l_1 \in [0,1]$

3)On a $\underbrace{u_{2k+1}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} l_1} = \underbrace{f(u_{2k})}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} f(l_0)}$ (par continuité de f)

Donc $f(l_0) = l_1$ par unicité de la limité.

$\underbrace{u_{2k+2}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} l_0} = \underbrace{f(u_{2k+1})}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} f(l_1)}$

Donc $f(l_1) = l_0$ par unicité de la limite.

On obtient alors que $\begin{cases} f(f(l_0)) = l_0 \\ f(f(l_1)) = l_1 \end{cases}$

<u>Déterminons les points fixes de f</u> :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{2+x} = x \\ &\iff 1 = 2x + x^2 \\ &\iff (x+1)^2 = 2 \\ &\iff x = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

<u>Déterminons les points fixes de $f \circ f$</u> :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(x))$ sont bien définit.

$$\begin{aligned} f(f(x)) = x &\iff \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = x \\ &\iff \frac{x+2}{2x+5} = x \\ &\iff 2x^2 + 4x - 1 = 0 \\ &\iff x^2 + 2x - 1 = 0 \\ &\iff x = -1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Comme $l_0, l_1 \in [0,1]$, on a $l_0 = l_1 = \sqrt{2} - 1$

Donc $\begin{cases} u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{2}-1 \\ u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{2}-1 \end{cases}$

Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}-1$

6.3 Résumé des résultats utiles

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : I \to \mathbb{R}$

- Si $S \subseteq I$ est stable et $u_0 \in S$, alors u (est bien définie et) à valeurs dans S.
- Si l'itératrice f est croissante, u est monotone.
- Si l'itératrice f est décroissante, $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées.
- Si u converge vers l et que f est continue (en l), alors $f(l) = l$.